ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn : TOÁN - Khối : A và A1

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \ (1)$,với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$

Câu 3 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (x, y ∈ R).

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Câu 6 (1,0 điểm) : Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x +y + z = 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$.

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): ***Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)***

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm) : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình 2x – y – 3 = 0. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 8.a (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm I (0; 0; 3). Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Câu 9.a (1,0 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, x ≠ 0.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Câu 8.b (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P) : x + y – 2z + 5 = 0 và điểm A (1; -1; 2). Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 9.b (1,0 điểm) Cho số phức z thỏa $\frac{5(\bar{z} + i)}{z+1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

BÀI GIẢI GỢI Ý

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1: a/ Khảo sát, vẽ (C) :

$m = 0 \Rightarrow y = x^4 - 2x^2$

$D = R$, $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$

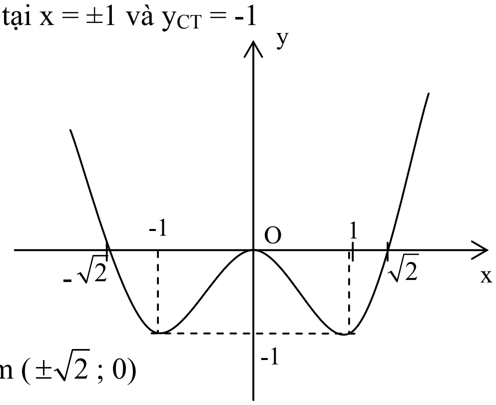
Hàm số đồng biến trên (-1; 0) và (1; +∞), nghịch biến trên (-∞;-1) và (0; 1)

Hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{CĐ}$ = 0, đạt cực tiểu tại x = ±1 và y_{CT} = -1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên :

x	-∞		-1		0		1		+∞
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	+∞	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	+∞



y = 0 ⇔ x = 0 hay x = $\pm\sqrt{2}$

Đồ thị tiếp xúc với Ox tại (0; 0) và cắt Ox tại hai điểm ($\pm\sqrt{2}$; 0)

b/ y' = $4x^3$ – 4(m + 1)x

y' = 0 ⇔ x = 0 hay x^2 = (m + 1)

Hàm số có 3 cực trị ⇔ m + 1 > 0 ⇔ m > -1

Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị A (0; m^2),

B ($-\sqrt{m+1}$; – 2m – 1); C ($\sqrt{m+1}$; –2m – 1)

Do AB = AC nên tam giác chỉ có thể vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC ⇒ M (0; -2m–1)

Do đó ycbt ⇔ BC = 2AM (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

⇔ $2\sqrt{m+1} = 2(m^2 + 2m + 1) = 2(m + 1)^2$ ⇔ $1 = (m + 1)\sqrt{m+1} = (m+1)^{\frac{3}{2}}$ (do m > -1)

⇔ 1 = (m + 1) (do m > -1) ⇔ m = 0

Câu 2. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

⇔ $2\sqrt{3}$ sinxcosx + $2\cos^2 x$ = 2cosx ⇔ cosx = 0 hay $\sqrt{3}$ sinx + cosx = 1

⇔ cosx = 0 hay $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sinx + $\frac{1}{2}$ cosx = $\frac{1}{2}$ ⇔ cosx = 0 hay $\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}$

⇔ x = $\frac{\pi}{2}+k\pi$ *hay* $x = k2\pi$ hay $x = \frac{2\pi}{3}+k2\pi$ (k ∈ Z).

Câu 3:

$$\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22 = y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ Đặt t = -x

Hệ trở thành $\begin{cases} t^3+y^3+3t^2+3y^2-9(t+y) = 22 \\ t^2+y^2+t+y = \frac{1}{2} \end{cases}$. Đặt S = y + t; P = y.t

Hệ trở thành $\begin{cases} S^3-3PS+3(S^2-2P)-9S = 22 \\ S^2-2P+S = \frac{1}{2} \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} S^3-3PS+3(S^2-2P)-9S = 22 \\ P = \frac{1}{2}(S^2+S-\frac{1}{2}) \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} 2S^3+6S^2+45S+82 = 0 \\ P = \frac{1}{2}(S^2+S-\frac{1}{2}) \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} P = \frac{3}{4} \\ S = -2 \end{cases}$. Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{-3}{2}\right)$

<u>Cách khác</u> : $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22 = y^3+3y^2-9y \\ (x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 = 1 \end{cases}$. Đặt u = $x-\frac{1}{2}$; v = y + $\frac{1}{2}$

Hệ đã cho thành $\begin{cases} u^3 - \dfrac{3}{2}u^2 - \dfrac{45}{4}u = (v+1)^3 - \dfrac{3}{2}(v+1)^2 - \dfrac{45}{4}(v+1) \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$

Xét hàm f(t) = $t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{45}{4}t$ có f'(t) = $3t^2 - 3t - \dfrac{45}{4} < 0$ với mọi t thỏa $|t| \le 1$

$\Rightarrow$ f(u) = f(v + 1) $\Rightarrow$ u = v + 1 $\Rightarrow$ $(v + 1)^2 + v^2 = 1 \Rightarrow$ v = 0 hay v = -1 $\Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} v = -1 \\ u = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm là $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-3}{2}\right)$.

Câu 4.

$$I = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx + \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^3 + J = \frac{2}{3} + J. \text{ Với } J = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$$

Đặt u = ln(x+1) $\Rightarrow$ du = $\dfrac{1}{x+1}dx$; dv = $\dfrac{1}{x^2}dx$, chọn v = $\dfrac{-1}{x}$ - 1

J = $\left.(\dfrac{-1}{x} - 1)\ln(x+1)\right|_1^3 + \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x} = \left.(\dfrac{-1}{x} - 1)\ln(x+1)\right|_1^3 + \left.\ln x\right|_1^3 = \dfrac{-4}{3}\ln 4 + 2\ln 2 + \ln 3$

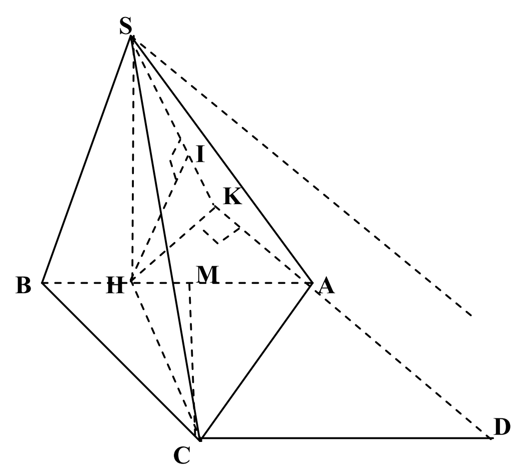
$= \dfrac{-2}{3}\ln 2 + \ln 3$.   Vậy I = $\dfrac{2}{3} + \dfrac{-2}{3}\ln 2 + \ln 3$

Cách khác : Đặt u = 1 + ln(x+1) $\Rightarrow$ du = $\dfrac{dx}{x+1}$; đặt dv = $\dfrac{dx}{x^2}$, chọn v = $\dfrac{-1}{x}$, ta có :

$$I = \left.-\frac{1}{x}\left[1+\ln(x+1)\right]\right|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \left.-\frac{1}{x}\left[1+\ln(x+1)\right]\right|_1^3 + \left.\ln\frac{x}{x+1}\right|_1^3 = \frac{2}{3} + \frac{-2}{3}\ln 2 + \ln 3$$

Câu 5.

Gọi M là trung điểm AB, ta có



$\boldsymbol{MH = MB - HB = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}}$

$\boldsymbol{CH^2 = \left[\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\dfrac{a}{6}\right]^2 = \dfrac{28a^2}{36} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}}$

$\boldsymbol{SC = 2HC = \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}}$; SH = CH.tan60^0 = $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

$\boldsymbol{V(S, ABC) = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}a = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{12}}$

dựng D sao cho ABCD là hình thoi, AD//BC

Vẽ HK vuông góc với AD. Và trong tam giác vuông SHK, ta kẻ HI là chiều cao của SHK.

Vậy khoảng cách d(BC,SA) chính là khoảng cách 3HI/2 cần tìm.

$\boldsymbol{HK = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}$, hệ thức lượng $\Rightarrow \boldsymbol{\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$

$\boldsymbol{\Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d\left[BC, SA\right] = \dfrac{3}{2}HI = \dfrac{3}{2}\dfrac{a\sqrt{42}}{12} = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}}$

Câu 6. x + y + z = 0 nên z = -(x + y) và có 2 số không âm hoặc không dương. Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử xy $\ge$ 0

Ta có $P = 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12(x^2+y^2+xy)} =$

$= 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]} \geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]}$

$\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{3|x+y|}{2}} - 2\sqrt{3}\,|x+y|$. Đặt t = $|x+y| \geq 0$, xét f(t) = $2.(\sqrt{3})^{3t} - 2\sqrt{3}t$

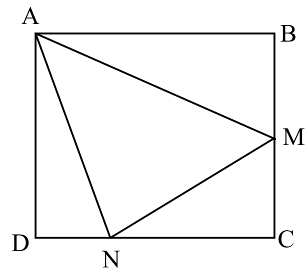
f'(t) = $2.3(\sqrt{3})^{3t}.\ln\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{3t}\ln\sqrt{3} - 1) > 0$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $[0; +\infty)$ $\Rightarrow$ f(t) $\geq$ f(0) = 2

Mà $3^{|x-y|} \geq 3^0 = 1$. Vậy P $\geq 3^0 + 2 = 3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z = 0. Vậy min P = 3.

A. Theo chương trình Chuẩn :

Câu 7a.



Ta có : AN = $\frac{a\sqrt{10}}{3}$; AM = $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; MN = $\frac{5a}{6}$;

cosA = $\frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^o$

(Cách khác :Để tính $\widehat{MAN} = 45^0$ ta có thể tính

$tg(\widehat{DAM} - \widehat{DAN}) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2.\frac{1}{3}} = 1$)

Phương trình đường thẳng AM : ax + by $-\frac{11}{2}a - \frac{1}{2}b = 0$

$\cos\widehat{MAN} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow$ $3t^2 - 8t - 3 = 0$ (với t = $\frac{a}{b}$) $\Rightarrow$ t = 3 hay $t = -\frac{1}{3}$

+ Với t = 3 $\Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ A (4; 5)

+ Với $t = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ A (1; -1)

Cách khác: A (a; 2a – 3), $d(M, AN) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, MA = $MH.\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $(a - \frac{11}{2})^2 + (2a - \frac{7}{2})^2 = \frac{45}{2}$

$\Leftrightarrow$ a = 1 hay a = 4 $\Rightarrow$ A (1; -1) hay A (4; 5).

Câu 8a. Ta có M (-1; 0; 2) thuộc d, gọi $\overrightarrow{u_d}$ = (1; 2; 1) là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

$IH = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = d(I,d) = \frac{\left|[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$, $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{u_d}] = (-2;0;2)$ $\Rightarrow$ IH = $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ R = $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\Rightarrow$ phương trình mặt cầu (S) là : $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

Câu 9.a. $5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5.n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\Leftrightarrow$ 30 = (n – 1) (n – 2), (do n > 0) $\Rightarrow$ n = 7

Gọi a là hệ số của x^5 ta có $C_7^{7-i}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-i}.\left(-\frac{1}{x}\right)^i = ax^5 \Leftrightarrow (-1)^i C_7^{7-i}.\left(\frac{1}{2}\right)^{7-i}.x^{14-3i} = ax^5$

$\Rightarrow$ 14 – 3i = 5 $\Rightarrow$ i = 3 và $-C_7^{7-i}.\left(\frac{1}{2}\right)^{7-i} = a$ $\Rightarrow$ a = $\frac{-35}{16}$. Vậy số hạng chứa x^5 là $\frac{-35}{16}.x^5$.

B. Theo chương trình Nâng cao :

Câu 7b Phương trình chính tắc của (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$. Ta có a = 4

(E)cắt (C) tại 4 điểm tạo thành hình vuông nên :

M (2;-2) thuộc (E) $\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}$. Vậy (E) có dạng $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Câu 8b. $M\in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)(t\in R)$; A là trung điểm MN $\Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$

$N\in(P)\Rightarrow t=2\Rightarrow N(-1;-4;0)$; Δ đi qua A và N nên phương trình có dạng : $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2}$

Câu 9b. $z=x+yi$

$\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1}=2-i \Leftrightarrow \frac{5(x-yi+i)}{x+yi+1}=2-i \Leftrightarrow \frac{5[(x-(y-1)i)}{(x+1)+yi}=2-i$

$\Leftrightarrow 5x-5(y-1)i=2(x+1)-(x+1)i+2yi+y \Leftrightarrow 5x-5(y-1)i=(2x+2+y)-(x+1-2y)i$

$\begin{cases}2x+2+y=5x\\ x+1-2y=5(y-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=2\\ x-7y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

z = 1 + i; $w=1+z+z^2=1+(1+i)+(1+i)^2=1+1+i+1+2i+(-1)=2+3i \Rightarrow |w|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Phạm Viết Kha

(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)